

2. Conversión de Coordenadas.

2. Conversión de Coordenadas.

- Proyección Conforme \Rightarrow Sistema de coordenadas simétrico (isométrico).
 - Plano de la Proyección, (x, y)
 - Elipsoide (superficie de referencia parametrizada), (ϕ, λ)
- Cálculo analítico \Rightarrow Función Analítica de variable compleja.

$$y + ix = f(\phi + i\lambda)$$

$$\phi + i\lambda = F(y + ix)$$

donde $\lambda = \lambda - \lambda_0$, siendo λ_0 la longitud del Meridiano Central del Huso, ϕ la latitud Isométrica correspondiente a la latitud geodésica ϕ e i es $\sqrt{-1}$.

- Si f y F son **funciones continuas y derivables** (analíticas) en el dominio del trabajo (no Polos), la proyección así definida **cumple las CONDICIONES DE CONFORMIDAD**.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Paso de coordenadas geodésicas (φ, λ) a coordenadas UTM (x, y).
- Se puede expresar como una **Función Analítica de variable compleja**:

$$y + ix = f(\phi + i\lambda)$$

donde $\lambda = \lambda - \lambda_0$, siendo λ_0 la longitud del Meridiano Central del huso, ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica φ e i es $\sqrt{-1}$.

- Asumiendo que λ (incremento de longitudes con respecto al meridiano central) es pequeño, se puede realizar un **desarrollo en serie de Taylor de esta función en torno al punto ϕ** (desarrollo hasta el séptimo término, asegura precisión milimétrica para incrementos de longitud de 3^o):

$$y + ix = f(\phi + i\lambda) = f(\phi) + \frac{df(\phi)}{d\phi} \cdot \frac{i\lambda}{1!} + \frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} \cdot \frac{(i\lambda)^2}{2!} + \\ + \frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3} \cdot \frac{(i\lambda)^3}{3!} + \frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4} \cdot \frac{(i\lambda)^4}{4!} + \frac{d^5f(\phi)}{d\phi^5} \cdot \frac{(i\lambda)^5}{5!} + \frac{d^6f(\phi)}{d\phi^6} \cdot \frac{(i\lambda)^6}{6!} + \dots$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e $i^6 = -1$.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Separamos los términos reales e imaginarios:

$$x = \lambda \cdot \frac{df(\phi)}{d\phi} - \frac{\lambda^3}{6} \cdot \frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3} + \frac{\lambda^5}{120} \cdot \frac{d^5f(\phi)}{d\phi^5} - \dots$$

$$y = f(\phi) - \frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} + \frac{\lambda^4}{24} \cdot \frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4} - \frac{\lambda^6}{720} \cdot \frac{d^6f(\phi)}{d\phi^6} + \dots$$

donde $f(\phi)$ es la función $f(\phi + i\lambda)$ en el meridiano central, donde $\lambda = 0$.

- Para calcular la función $f(\phi)$, imponemos la condición de que **el meridiano de tangencia** debe ser **automecoico**:

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(\phi)$$

$$y = f(\phi) = \int_0^\varphi \rho \cdot d\varphi = S_m$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Cálculo de las derivadas de $f(\phi)$:

$$\begin{aligned} 1.- \quad \frac{df(\phi)}{d\phi} &= f'(\phi) = \frac{df(\phi)}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = K_o \cdot \rho \cdot \frac{r}{\rho} = K_o \cdot r \\ &\Rightarrow f'(\phi) = K_o \cdot N \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.- \quad \frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} &= f^2(\phi) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{df(\phi)}{d\phi} \right) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \\ &= \frac{d}{d\varphi} (K_o \cdot r) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{d}{d\varphi} (K_o \cdot N \cdot \cos \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \\ &= -K_o \cdot \rho \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \frac{r}{\rho} = -K_o \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi = \\ &= -K_o \cdot N \cdot \cos^2 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \end{aligned}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

$$\begin{aligned} 3.- \quad \frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3} &= f^3(\phi) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} \right) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{d}{d\varphi} (-K_o \cdot r \cdot \operatorname{sen} \varphi) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \\ &= -K_o \cdot \left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \operatorname{sen} \varphi + r \cdot \cos \varphi \right) \frac{d\varphi}{d\phi} = -K_o \cdot (-\rho \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi + N \cdot \cos^2 \varphi) \cdot \frac{r}{\rho} = \\ &= -K_o \cdot N \cdot \cos^3 \varphi \cdot (1 + \eta^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \\ &\text{siendo} \quad \eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.- \quad \frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4} &= f^4(\phi) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3} \right) \cdot \frac{d\varphi}{d\phi} = \\ &= K_o \cdot N \cdot \cos^4 \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi \cdot (5 + 9\eta^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi + 4\eta^4) \\ &\text{siendo} \quad \eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

$$5.- \frac{d^5 f(\phi)}{d\phi^5} = f^5(\phi) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^4 f(\phi)}{d\phi^4} \right) \cdot \frac{d\phi}{d\phi} =$$

$$= K_o \cdot N \cdot \cos^5 \phi \cdot (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 14 \eta^2 -$$

$$- 58 \eta^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi - 64 \eta^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 13 \eta^4 + 4 \eta^6 - 24 \eta^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi)$$

siendo $\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \phi$

$$6.- \frac{d^6 f(\phi)}{d\phi^6} = f^6(\phi) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^5 f(\phi)}{d\phi^5} \right) \cdot \frac{d\phi}{d\phi} =$$

$$= -K_o \cdot N \cdot \cos^6 \phi \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 270 \eta^2 -$$

$$- 330 \eta^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 445 \eta^4 - 680 \eta^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 324 \eta^6 -$$

$$- 600 \eta^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 88 \eta^8 - 192 \eta^8 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi)$$

siendo $\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \phi$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Teniendo en cuenta las derivadas calculadas, las expresiones para resolver el problema directo en la proyección UTM son:

$$E = 500.000 + K_o \left(\lambda \cdot N \cdot \cos \phi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cdot \cos^3 \phi \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \phi + \eta^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cdot \cos^5 \phi \cdot (5 - 18 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 14 \eta^2 - 58 \eta^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 13 \eta^4 - \right.$$

$$\left. - 64 \eta^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 4 \eta^6 - 24 \eta^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) \right)$$

$$K_o = 0,9996$$

$$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \phi$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$N = K_o \left(s_m + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \cos^2 \phi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \cos^4 \phi \cdot (5 - \operatorname{tg}^2 \phi + 9 \eta^2 + 4 \eta^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot \operatorname{tg} \phi \cdot \cos^6 \phi \cdot (61 - 58 \operatorname{tg}^2 \phi + \operatorname{tg}^4 \phi + 270 \eta^2 - 330 \eta^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 445 \eta^4 - \right.$$

$$\left. - 680 \eta^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 324 \eta^6 - 600 \eta^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi + 88 \eta^8 - 192 \eta^8 \cdot \operatorname{tg}^2 \phi) \right)$$

λ en radianes.

s_m , longitud de arco de meridiano, en metros.

En el hemisferio Sur a la coordenada "y" hay que sumarle 10.000.000 metros.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Paso de coordenadas UTM (E, N) a coordenadas geodésicas (ϕ , λ).
- Primero se **anula la traslación de los ejes** y el **factor de reducción** correspondiente al **Artificio de Tissot**.

$$x = \frac{E - 500.000}{K_o}$$

$$y = \frac{N}{K_o} \rightarrow \text{Hemisferio Norte}$$

$$y = \frac{N - 10.000.000}{K_o} \rightarrow \text{Hemisferio Sur}$$

- Se plantea el problema inverso de forma similar al problema directo. Definimos una **Función Analítica de variable compleja** que relaciona dos planos complejos: plano de la proyección, parametrizado por (x, y) y superficie del elipsoide de revolución, parametrizado por (ϕ, λ) .

$$\boxed{\phi + i\lambda = F(y + ix)}$$

donde $\lambda = \lambda - \lambda_o$, siendo λ_o la longitud del Meridiano Central del huso, ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica ϕ e i es $\sqrt{-1}$.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- **Particularizamos** el desarrollo en serie de Taylor para el **punto $(y+i0)$** , sobre la proyección del meridiano central del huso.

$$y = s_m(\phi') = \int_0^{\phi'} \rho' \cdot d\phi$$

$$\Rightarrow F(y) = \phi'$$

- Conociendo la longitud de arco de meridiano, podemos conocer ϕ' y por tanto ϕ .

$$\phi' = \int_0^{\phi'} \frac{\rho'}{r'} \cdot d\phi$$

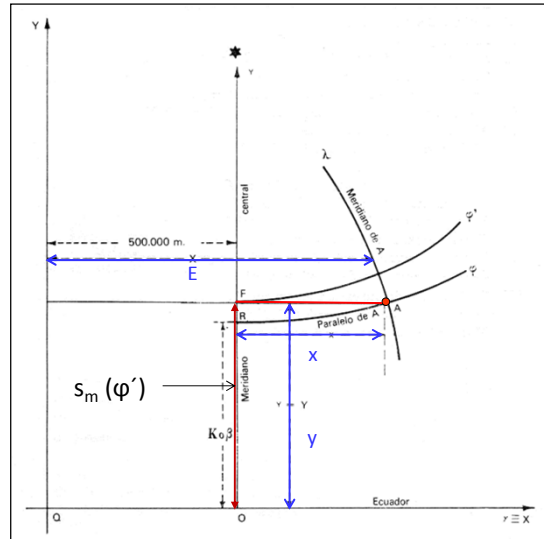
- El **desarrollo en serie de Taylor** de la función F en torno a "y" es:

$$\begin{aligned} \phi + i\lambda = F(y + ix) = F(y) + \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{ix}{1!} + \frac{d^2 F(y)}{dy^2} \cdot \frac{(ix)^2}{2!} + \\ + \frac{d^3 F(y)}{dy^3} \cdot \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{d^4 F(y)}{dy^4} \cdot \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{d^5 F(y)}{dy^5} \cdot \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{d^6 F(y)}{dy^6} \cdot \frac{(ix)^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

donde $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e $i^6 = -1$.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO



2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Separamos los términos reales e imaginarios:

$$\lambda = x \cdot \frac{dF(y)}{dy} - \frac{x^3}{6} \cdot \frac{d^3F(y)}{dy^3} + \frac{x^5}{120} \cdot \frac{d^5F(y)}{dy^5} - \dots$$

$$\phi = \phi' - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2F(y)}{dy^2} + \frac{x^4}{24} \cdot \frac{d^4F(y)}{dy^4} - \frac{x^6}{720} \cdot \frac{d^6F(y)}{dy^6} + \dots$$

- Calculamos las derivadas de $F(y)$, particularizando para el valor conocido ϕ' en el punto de coordenada $(0, y)$.

$$F(y) = \phi' = \int_0^{\phi'} \frac{\rho'}{r'} \cdot d\phi \Rightarrow \frac{dF}{d\phi} = \frac{\rho'}{r'}$$

$$y = s_m(\phi') = \int_0^{\phi'} \rho' \cdot d\phi \Rightarrow \frac{ds_m(\phi')}{dy} = 1, \quad \frac{d\phi}{ds_m(\phi')} = \frac{1}{\rho'}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Cálculo de las derivadas de $f(\phi)$:

$$1.- \quad \frac{dF(y)}{dy} = F'(y) = \frac{dF(y)}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} = \frac{\rho'}{r'} \cdot \frac{1}{\rho'} \cdot 1 = \frac{1}{r'} \Rightarrow F'(y) = \frac{1}{N' \cdot \cos \phi'}$$

$$2.- \quad \frac{d^2 F(y)}{dy^2} = F''(y) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dF(y)}{dy} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r'} \right) \cdot \frac{1}{\rho'} \cdot 1 = \frac{tg \phi'}{N'^2 \cdot \cos \phi'}$$

$$3.- \quad \frac{d^3 F(y)}{dy^3} = F'''(y) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^2 F(y)}{dy^2} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} =$$

$$= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{tg \phi'}{N'^2 \cdot \cos \phi'} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} = \frac{(1 + \eta'^2 + 2 \cdot tg^2 \phi')}{N'^3 \cdot \cos \phi'}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

$$4.- \quad \frac{d^4 F(y)}{dy^4} = F''''(y) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^3 F(y)}{dy^3} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} =$$

$$= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{(1 + \eta'^2 + 2 \cdot tg^2 \phi')}{N'^3 \cdot \cos \phi'} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} =$$

$$= \frac{tg \phi' \cdot (5 + \eta'^2 - 4\eta'^4 + 6tg^2 \phi')}{N'^4 \cdot \cos \phi'}$$

$$5.- \quad \frac{d^5 F(y)}{dy^5} = F'''''(y) = \frac{d}{d\phi} \left(\frac{d^4 F(y)}{dy^4} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} =$$

$$= \frac{d}{d\phi} \left(\frac{tg \phi' \cdot (5 + \eta'^2 - 4\eta'^4 + 6tg^2 \phi')}{N'^4 \cdot \cos \phi'} \right) \cdot \frac{d\phi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} =$$

$$= \frac{1}{N'^5 \cdot \cos \phi'} \cdot (5 + 28tg^2 \phi' + 24tg^4 \phi' + 6\eta'^2 + 8\eta'^2 \cdot tg^2 \phi' - 3\eta'^4 \cdot tg^2 \phi' - 4\eta'^6 + 24\eta'^6 \cdot tg^2 \phi')$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

$$\begin{aligned}
 6.- \quad \frac{d^6 F(y)}{dy^6} &= F^6(y) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dF^5(y)}{dy^5} \right) \cdot \frac{d\varphi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} = \\
 &= \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{N^5 \cdot \cos \varphi'} \cdot (5 + 28 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi' + 6\eta'^2 + 8\eta'^2 \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - 3\eta'^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - 4\eta'^6 + 24\eta'^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi') \cdot \frac{d\varphi}{ds_m} \cdot \frac{ds_m}{dy} = \\
 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi'}{N^6 \cdot \cos \varphi'} \cdot (61 + 180 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 120 \operatorname{tg}^4 \varphi' + 46\eta'^2 + 48\eta'^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - \\
 &\quad - 3\eta'^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' + 100\eta'^6 - 96\eta'^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' + 88\eta'^8 - 192\eta'^8 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi')
 \end{aligned}$$

$$\eta'^2 = e'^2 \cdot \cos^2 \varphi'$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Teniendo en cuenta las derivadas calculadas, las expresiones para resolver el problema inverso son:

$$\lambda = \frac{x}{N' \cdot \cos \varphi'} - \frac{x^3}{6 \cdot N'^3 \cdot \cos \varphi'} \cdot (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi' + \eta'^2) + \frac{x^5}{120 \cdot N'^5 \cdot \cos \varphi'} \cdot (5 + 28 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 24 \operatorname{tg}^4 \varphi' + 6\eta'^2 + 8\eta'^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - 3\eta'^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - 4\eta'^6 + 24\eta'^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi')$$

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi' - \frac{x^2}{2 \cdot N'^2 \cdot \cos \varphi'} \cdot \operatorname{tg} \varphi' + \frac{x^4}{24 \cdot N'^4 \cdot \cos \varphi'} \cdot \operatorname{tg} \varphi' \cdot (5 + 6 \operatorname{tg}^2 \varphi' + \eta'^2 - 4\eta'^4) + \\
 &+ \frac{x^6}{720 \cdot N'^6 \cdot \cos \varphi'} \cdot \operatorname{tg} \varphi' \cdot \left(61 + 180 \operatorname{tg}^2 \varphi' + 120 \operatorname{tg}^4 \varphi' + 46\eta'^2 + 48\eta'^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' - \right. \\
 &\quad \left. - 3\eta'^4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' + 100\eta'^6 - 96\eta'^6 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' + 88\eta'^8 - 192\eta'^8 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi' \right)
 \end{aligned}$$

- De esta manera obtenemos las coordenadas del sistema isométrico (ϕ , λ), donde $\lambda = \lambda - \lambda_0$, siendo λ_0 la longitud del Meridiano Central del huso y ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica φ .

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LATITUD GEODÉSICA

1º MÉTODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE ϕ

$$\phi = \text{Ln} \left[\left(\frac{1 - e \cdot \text{sen} \varphi}{1 + e \cdot \text{sen} \varphi} \right)^{e/2} \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

1. Primer valor, aproximo a un modelo de tierra esférica ($e=0$).

$$\phi = \text{Ln} \left[\text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \Rightarrow e^\phi = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow \varphi_1 = 2 \cdot \left(\text{arctg}(e^\phi) - \frac{\pi}{4} \right)$$

2. Proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0,00001$ se para el proceso).

$$\phi = \text{Ln} \left[\left(\frac{1 - e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1}}{1 + e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1}} \right)^{e/2} \cdot \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2} \right) \right] \Rightarrow \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_n}{2} \right) = \frac{e^\phi}{\left(\frac{1 - e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1}}{1 + e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1}} \right)^{e/2}} = \frac{e^\phi \cdot (1 + e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1})^{e/2}}{(1 - e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1})^{e/2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_n = 2 \cdot \left[\text{arctg} \left(\frac{e^\phi \cdot (1 + e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1})^{e/2}}{(1 - e \cdot \text{sen} \varphi_{n-1})^{e/2}} \right) - \frac{\pi}{4} \right]$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LATITUD GEODÉSICA

2º METODO. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

$$\varphi = h(\phi) = \int_0^\phi \frac{r}{\rho} d\phi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{r}{\rho}, \quad \frac{dh}{d\varphi} = 1$$

- Se calcula φ como un desarrollo en serie de Taylor de la función $h(\phi)$, particularizando para el punto Φ' , tomando como incremento el valor $\Delta\phi = \phi - \phi'$.

$$\varphi = \varphi' - \frac{x^2}{2 \cdot N'^2} \cdot \text{tg} \varphi' \cdot (1 + \eta'^2) + \frac{x^4}{24 \cdot N'^4} \cdot \text{tg} \varphi' \cdot (5 + 3\text{tg}^2 \varphi' + 6\eta'^2 - 6\eta'^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi' - 3\eta'^4 - 9\eta'^4 \cdot \text{tg}^2 \varphi') - \frac{x^6}{720 \cdot N'^6} \cdot \text{tg} \varphi' \cdot \left(\begin{array}{l} 61 + 90\text{tg}^2 \varphi' + 45\text{tg}^4 \varphi' + 107\eta'^2 - 162\eta'^2 \cdot \text{tg}^2 \varphi' - 45\eta'^2 \cdot \text{tg}^4 \varphi' + 43\eta'^4 - \\ - 318\eta'^4 \cdot \text{tg}^2 \varphi' + 135\eta'^4 \cdot \text{tg}^4 \varphi' + 97\eta'^6 + 18\eta'^6 \cdot \text{tg}^2 \varphi' + 225\eta'^6 \cdot \text{tg}^4 \varphi' + 188\eta'^8 - \\ - 108\eta'^8 \cdot \text{tg}^2 \varphi' + 88\eta'^{10} - 192\eta'^{10} \cdot \text{tg}^2 \varphi' \end{array} \right)$$

ϕ y ϕ' expresados en radianes.

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- La longitud de arco de meridiano, desde el Ecuador hasta un paralelo de latitud φ , se expresa como:

$$l.a.m.(\varphi) = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}}$$

- Para calcular la anterior integral se realiza el desarrollo en potencias de $e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi$ y hacemos el cambio de variable $x = \text{sen} \varphi$:

$$f(\varphi) = \frac{1}{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)^{3/2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1 - e^2 \cdot x^2)^{3/2}}$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot x^2 + \frac{15}{8} \cdot e^4 \cdot x^4 + \frac{35}{16} \cdot e^6 \cdot x^6 + \frac{315}{128} \cdot e^8 \cdot x^8 + \frac{693}{256} \cdot e^{10} \cdot x^{10} + \dots$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- Desahacemos el cambio de variable e integramos y obtenemos la siguiente expresión para determinar la longitud de arco de meridiano:

$$l.a.m.(\varphi) = \int_0^\varphi \rho \cdot d\varphi = a(1 - e^2) \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6)$$

- Siendo los diferentes valores de g_n :

$$g_1 = \varphi$$

$$g_2 = \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{1}{2} \varphi\right)$$

$$g_3 = \frac{15}{8} \cdot e^4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \text{sen}^3 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{3}{8} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{3}{8} \varphi\right)$$

$$g_4 = \frac{35}{16} \cdot e^6 \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot \text{sen}^5 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{5}{24} \cdot \text{sen}^3 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{5}{16} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{5}{16} \varphi\right)$$

$$g_5 = \frac{315}{128} \cdot e^8 \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot \text{sen}^7 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{7}{48} \cdot \text{sen}^5 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{35}{192} \cdot \text{sen}^3 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{35}{128} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{35}{128} \varphi\right)$$

$$g_6 = \frac{693}{256} \cdot e^{10} \cdot \left(-\frac{1}{10} \cdot \text{sen}^9 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{9}{80} \cdot \text{sen}^7 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{21}{160} \cdot \text{sen}^5 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{21}{128} \cdot \text{sen}^3 \varphi \cdot \cos \varphi - \frac{63}{256} \cdot \text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi + \frac{63}{256} \varphi\right)$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- Para calcular la latitud geodésica φ a partir de la longitud de arco de meridiano, partimos de la expresión anterior y realizamos un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas:

$$l.a.m.(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi = a(1-e^2) \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6)$$

- Primer valor, igualo todos los términos g_n a 0, excepto g_1 y despeja:

$$g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 0 \Rightarrow l.a.m. = a \cdot (1-e^2) \cdot g_1 = a \cdot (1-e^2) \cdot \varphi \Rightarrow \varphi_1 = \frac{l.a.m.}{a \cdot (1-e^2)}$$

- Con el valor obtenido se calculan los términos g_2 a g_6 y se despeja un nuevo valor de φ del término g_1 . Se realiza un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0,00001$ se para el proceso).

$$\varphi_n = \frac{l.a.m.}{a \cdot (1-e^2)} - \left[(g_2)_{\varphi_{n-1}} + (g_3)_{\varphi_{n-1}} + (g_4)_{\varphi_{n-1}} + (g_5)_{\varphi_{n-1}} + (g_6)_{\varphi_{n-1}} \right]$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

2º METODO.

- Otra forma de calcular la longitud de arco de meridiano es utilizando la expresión:

$$l.a.m. = s_m = m \cdot \varphi - n \cdot \text{sen}2\varphi + p \cdot \text{sen}4\varphi - q \cdot \text{sen}6\varphi$$

- φ se introduce en radianes y los términos se calculan:

$$\begin{aligned} m &= A \cdot a \cdot (1-e^2) & n &= \frac{B}{2} \cdot a \cdot (1-e^2) \\ p &= \frac{C}{4} \cdot a \cdot (1-e^2) & q &= \frac{D}{6} \cdot a \cdot (1-e^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{45}{64} \cdot e^4 + \frac{175}{256} \cdot e^6 \\ B &= \frac{3}{4} \cdot e^2 + \frac{15}{16} \cdot e^4 + \frac{525}{512} \cdot e^6 \\ C &= \frac{15}{64} \cdot e^4 + \frac{105}{256} \cdot e^6 \\ D &= \frac{35}{512} \cdot e^6 \end{aligned}$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

2º METODO.

- Para calcular la latitud geodésica φ a partir de la longitud de arco de meridiano, partimos de la expresión anterior y realizamos un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas:

$$l.a.m. = s_m = m \cdot \varphi - n \cdot \text{sen}2\varphi + p \cdot \text{sen}4\varphi - q \cdot \text{sen}6\varphi$$

1. Primer valor, igualo todos los términos 0, excepto el primero, $m \cdot \varphi$:

$$l.a.m. = m \cdot \varphi_1 \Rightarrow \Rightarrow \varphi_1 = \frac{l.a.m.}{m}$$

2. Con el valor obtenido se calculan el resto de términos y se despeja un nuevo valor de φ . Se realiza un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0,00001$ se para el proceso).

$$\Rightarrow \varphi_n = \frac{l.a.m. + n \cdot \text{sen}2\varphi_{n-1} - p \cdot \text{sen}4\varphi_{n-1} + q \cdot \text{sen}6\varphi_{n-1}}{m}$$