2. Conversión de Coordenadas.

2. Conversión de Coordenadas.

- Proyección Conforme $\Rightarrow$ Sistema de coordenadas simétrico (isométrico).
  - **Plano de la Proyección, (x, y)**
  - **Elipsoide** (superficie de referencia parametrizada), **(ϕ, λ)**
- Cálculo analítico $\Rightarrow$ Función Analítica de variable compleja.

$$y + ix = f(\phi + i\lambda)$$
$$\phi + i\lambda = F(y + ix)$$

donde $\lambda = \lambda - \lambda_o$, siendo λ_o la longitud del Meridiano Central del Huso, ϕ la latitud Isométrica correspondiente a la latitud geodésica φ e i es $\sqrt{-1}$.

- Si f y F son **funciones continuas y derivables** (analíticas) en el dominio del trabajo (no Polos), la proyección así definida **cumple las CONDICIONES DE CONFORMIDAD.**

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- **Paso de coordenadas geodésicas (φ, λ) a coordenadas UTM (x, y).**
- Se puede expresar como una **Función Analítica de variable compleja:**

$$\boxed{y + ix = f(\phi + i\lambda)}$$

donde $\lambda=\lambda-\lambda_o$, siendo λ_o la longitud del Meridiano Central del huso, ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica φ e i es √-1.

- Asumiendo que λ (incremento de longitudes con respecto al meridiano central) es pequeño, se puede realizar un **desarrollo en serie de Taylor de esta función en torno al punto ϕ** (desarrollo hasta el séptimo término, asegura precisión milimétrica para incrementos de longitud de 3º):

$$y + ix = f(\phi + i\lambda) = f(\phi) + \frac{df(\phi)}{d\phi}\cdot\frac{i\lambda}{1!} + \frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2}\cdot\frac{(i\lambda)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3}\cdot\frac{(i\lambda)^3}{3!} + \frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4}\cdot\frac{(i\lambda)^4}{4!} + \frac{d^5f(\phi)}{d\phi^5}\cdot\frac{(i\lambda)^5}{5!} + \frac{d^6f(\phi)}{d\phi^6}\cdot\frac{(i\lambda)^6}{6!} + \ldots$$

donde i = √-1, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e $i^6 = -1$.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Separamos los términos reales e imaginarios:

$$x = \lambda\cdot\frac{df(\phi)}{d\phi} - \frac{\lambda^3}{6}\cdot\frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3} + \frac{\lambda^5}{120}\cdot\frac{d^5f(\phi)}{d\phi^5} - \ldots$$

$$y = f(\phi) - \frac{\lambda^2}{2}\cdot\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2} + \frac{\lambda^4}{24}\cdot\frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4} - \frac{\lambda^6}{720}\cdot\frac{d^6f(\phi)}{d\phi^6} + \ldots$$

donde f(ϕ) es la función f(ϕ +iλ) en el meridiano central, donde λ = 0.

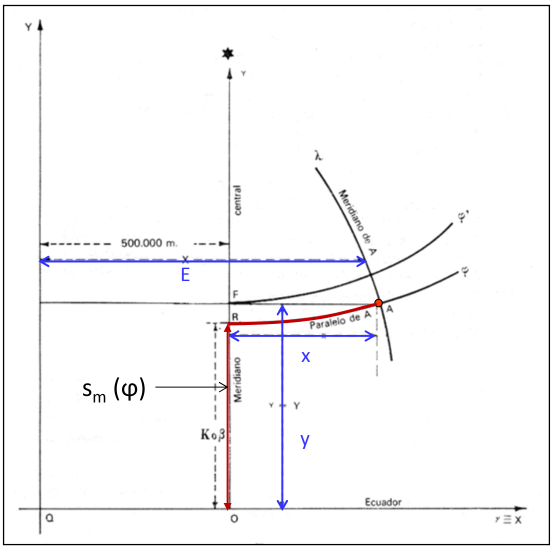
- Para calcular la función f(ϕ), imponemos la condición de que **el meridiano de tangencia** debe ser **automecoico**:

$$\lambda = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(\phi)$$

$$y = f(\phi) = \int_0^{\varphi} \rho\cdot d\varphi = s_m$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO



2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Debemos introducir ahora el uso del **Artificio de Tissot**, cuyo objetivo es reducir las deformaciones en los extremos del huso, para ello se toma un **cilindro secante** en vez de tangente.

- Matemáticamente equivale a transformar el meridiano central automecoico en una línea isométrica (con la misma deformación). Para ello multiplicamos por un **factor de reducción**:
  - 0º < φ < 36º → K_o=0,999333333
  - φ > 40º → K_o=0,9996

$$y = f(\phi) = K_o \cdot \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi = K_o \cdot s_m \Rightarrow \frac{df(\phi)}{d\varphi} = K_o \cdot \rho$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Cálculo de las derivadas de f(ϕ):

1.- $$\frac{df(\phi)}{d\phi}=f'(\phi)=\frac{df(\phi)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=K_o\cdot\rho\cdot\frac{r}{\rho}=K_o\cdot r$$

$$\Rightarrow f'(\phi)=K_o\cdot N\cdot\cos\varphi$$

2.- $$\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2}=f^2(\phi)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{df(\phi)}{d\phi}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=$$

$$=\frac{d}{d\varphi}(K_o\cdot r)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=\frac{d}{d\varphi}(K_o\cdot N\cdot\cos\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=$$

$$=-K_o\cdot\rho\cdot sen\varphi\cdot\frac{r}{\rho}=-K_o\cdot r\cdot sen\varphi=$$

$$=-K_o\cdot N\cdot\cos^2\varphi\cdot tg\varphi$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

3.- $$\frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3}=f^3(\phi)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^2f(\phi)}{d\phi^2}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=\frac{d}{d\varphi}(-K_o\cdot r\cdot sen\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=$$

$$=-K_o\cdot\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot sen\varphi+r\cdot\cos\varphi\right)\frac{d\varphi}{d\phi}=-K_o\cdot\left(-\rho\cdot sen^2\varphi+N\cdot\cos^2\varphi\right)\cdot\frac{r}{\rho}=$$

$$=-K_o\cdot N\cdot\cos^3\varphi\cdot\left(1+\eta^2-tg^2\varphi\right)$$

siendo $\eta^2=e'^2\cdot\cos^2\varphi$

4.- $$\frac{d^4f(\phi)}{d\phi^4}=f^4(\phi)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^3f(\phi)}{d\phi^3}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi}=$$

$$=K_o\cdot N\cdot\cos^4\varphi\cdot tg\varphi\cdot\left(5+9\eta^2-tg^2\varphi+4\eta^4\right)$$

siendo $\eta^2=e'^2\cdot\cos^2\varphi$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

5.- $$\frac{d^5 f(\phi)}{d\phi^5} = f^5(\phi) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^4 f(\phi)}{d\phi^4}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi} =$$
$$= K_o \cdot N \cdot \cos^5\varphi \cdot (5 - 18tg^2\varphi + tg^4\varphi + 14\eta^2 -$$
$$- 58\eta^2 \cdot tg^2\varphi - 64\eta^4 \cdot tg^2\varphi + 13\eta^4 + 4\eta^6 - 24\eta^6 \cdot tg^2\varphi)$$
siendo $\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2\varphi$

6.- $$\frac{d^6 f(\phi)}{d\phi^6} = f^6(\phi) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d^5 f(\phi)}{d\phi^5}\right)\cdot\frac{d\varphi}{d\phi} =$$
$$= -K_o \cdot N \cdot \cos^6\varphi \cdot tg\varphi \cdot (61 - 58tg^2\varphi + tg^4\varphi + 270\eta^2 -$$
$$- 330\eta^2 \cdot tg^2\varphi + 445\eta^4 - 680\eta^4 \cdot tg^2\varphi + 324\eta^6 -$$
$$- 600\eta^6 \cdot tg^2\varphi + 88\eta^8 - 192\eta^8 \cdot tg^2\varphi)$$
siendo $\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2\varphi$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA DIRECTO

- Teniendo en cuenta las derivadas calculadas, las expresiones para resolver el problema directo en la proyección UTM son:

$$E = 500.000 + K_o(\lambda \cdot N \cdot \cos\varphi + \frac{\lambda^3}{6} \cdot N \cdot \cos^3\varphi \cdot (1 - tg^2\varphi + \eta^2) +$$
$$+ \frac{\lambda^5}{120} \cdot N \cdot \cos^5\varphi \cdot (5 - 18tg^2\varphi + tg^4\varphi + 14\eta^2 - 58\eta^2 \cdot tg^2\varphi + 13\eta^4 -$$
$$- 64\eta^4 \cdot tg^2\varphi + 4\eta^6 - 24\eta^6 \cdot tg^2\varphi))$$

$K_o = 0{,}9996$

$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2\varphi$

$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$

$$N = K_o(s_m + \frac{\lambda^2}{2} \cdot N \cdot tg\varphi \cdot \cos^2\varphi + \frac{\lambda^4}{24} \cdot N \cdot tg\varphi \cdot \cos^4\varphi \cdot (5 - tg^2\varphi + 9\eta^2 + 4\eta^4) +$$
$$+ \frac{\lambda^6}{720} \cdot N \cdot tg\varphi \cdot \cos^6\varphi \cdot (61 - 58tg^2\varphi + tg^4\varphi + 270\eta^2 - 330\eta^2 \cdot tg^2\varphi + 445\eta^4 -$$
$$- 680\eta^4 \cdot tg^2\varphi + 324\eta^6 - 600\eta^6 \cdot tg^2\varphi + 88\eta^8 - 192\eta^8 \cdot tg^2\varphi))$$

λ en radianes.
s_m, longitud de arco de meridiano, en metros.
En el hemisferio Sur a la coordenada "y" hay que sumarle 10.000.000 metros.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- **Paso de coordenadas UTM (E, N) a coordenadas geodésicas (φ, λ).**

- Primero se **anula la traslación de los ejes** y el **factor de reducción** correspondiente al **Artificio de Tissot.**

$$x = \frac{E - 500.000}{K_o}$$

$$y = \frac{N}{K_o} \rightarrow Hemisferio \quad Norte$$

$$y = \frac{N - 10.000.000}{K_o} \rightarrow Hemisferio \quad Sur$$

- Se plantea el problema inverso de forma similar al problema directo. Definimos una **Función Analítica de variable compleja** que relaciona dos planos complejos: plano de la proyección, parametrizado por (x, y) y superficie del elipsoide de revolución, parametrizado por (ϕ, λ).

$$\boxed{\phi + i\lambda = F(y + ix)}$$

donde $\lambda=\lambda-\lambda_o$, siendo λ_o la longitud del Meridiano Central del huso, ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica ϕ e i es √-1.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- **Particularizamos** el desarrollo en serie de Taylor para el **punto (y+i0)**, sobre la proyección del meridiano central del huso.

$$y = s_m(\varphi') = \int_0^{\varphi} \rho' \cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow F(y) = \phi'$$

- Conociendo la longitud de arco de meridiano, podemos conocer φ´ y por tanto ϕ´.

$$\phi' = \int_0^{\varphi'} \frac{\rho'}{r'} \cdot d\varphi$$

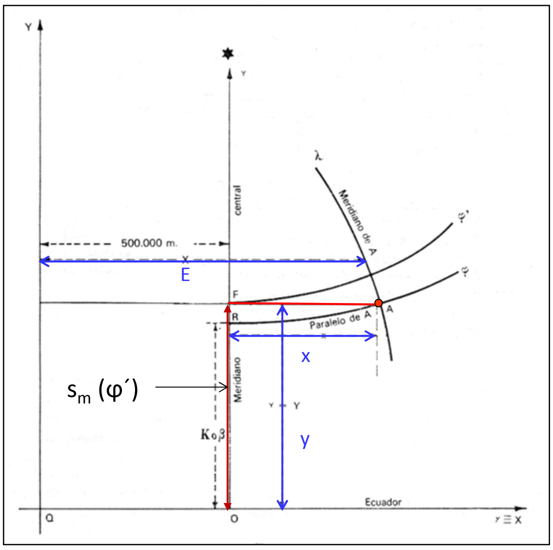
- El **desarrollo en serie de Taylor** de la función F en torno a “y” es:

$$\phi + i\lambda = F(y + ix) = F(y) + \frac{dF(y)}{dy} \cdot \frac{ix}{1!} + \frac{d^2F(y)}{dy^2} \cdot \frac{(ix)^2}{2!} +$$
$$+ \frac{d^3F(y)}{dy^3} \cdot \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{d^4F(y)}{dy^4} \cdot \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{d^5F(y)}{dy^5} \cdot \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{d^6F(y)}{dy^6} \cdot \frac{(ix)^6}{6!} + \dots$$

donde i = √-1, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ e $i^6 = -1$.

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO



2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Separamos los términos reales e imaginarios:

$$\lambda = x \cdot \frac{dF(y)}{dy} - \frac{x^3}{6} \cdot \frac{d^3F(y)}{dy^3} + \frac{x^5}{120} \cdot \frac{d^5F(y)}{dy^5} - \ldots$$

$$\phi = \phi' - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{d^2F(y)}{dy^2} + \frac{x^4}{24} \cdot \frac{d^4F(y)}{dy^4} - \frac{x^6}{720} \cdot \frac{d^6F(y)}{dy^6} + \ldots$$

- Calculamos las derivadas de F(y), particularizando para el valor conocido φ´ en el punto de coordenada (0, y).

$$F(y) = \phi' = \int_0^{\varphi'} \frac{\rho'}{r'} \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{dF}{d\varphi} = \frac{\rho'}{r'}$$

$$y = s_m(\varphi') = \int_0^{\varphi'} \rho' \cdot d\varphi \Rightarrow \frac{ds_m(\varphi')}{dy} = 1, \qquad \frac{d\varphi}{ds_m(\varphi')} = \frac{1}{\rho'}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Cálculo de las derivadas de f(ϕ):

1.- $$\frac{dF(y)}{dy}=F'(y)=\frac{dF(y)}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=\frac{\rho'}{r'}\cdot\frac{1}{\rho'}\cdot 1=\frac{1}{r'}\Rightarrow F'(y)=\frac{1}{N'\cdot\cos\varphi'}$$

2.- $$\frac{d^2F(y)}{dy^2}=F^2(y)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dF(y)}{dy}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r'}\right)\cdot\frac{1}{\rho'}\cdot 1=\frac{tg\varphi'}{N'^2\cdot\cos\varphi'}$$

3.- $$\frac{d^3F(y)}{dy^3}=F^3(y)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dF^2(y)}{dy^2}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$
$$=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{tg\varphi'}{N'^2\cdot\cos\varphi'}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=\frac{(1+\eta'^2+2\cdot tg^2\varphi')}{N'^3\cdot\cos\varphi'}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

4.- $$\frac{d^4F(y)}{dy^4}=F^4(y)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dF^3(y)}{dy^3}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$
$$=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{(1+\eta'^2+2\cdot tg^2\varphi')}{N'^3\cdot\cos\varphi'}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$
$$=\frac{tg\varphi'\cdot\left(5+\eta'^2-4\eta'^4+6tg^2\varphi'\right)}{N'^4\cdot\cos\varphi'}$$

5.- $$\frac{d^5F(y)}{dy^5}=F^5(y)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dF^4(y)}{dy^4}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$
$$=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{tg\varphi'\cdot\left(5+\eta'^2-4\eta'^4+6tg^2\varphi'\right)}{N'^4\cdot\cos\varphi'}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$
$$=\frac{1}{N'^5\cdot\cos\varphi'}\cdot(5+28tg^2\varphi'+24tg^4\varphi'+6\eta'^2+8\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-3\eta'^4\cdot tg^2\varphi'-4\eta'^6+24\eta'^6\cdot tg^2\varphi')$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

6.- $$\frac{d^6F(y)}{dy^6}=F^6(y)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dF^5(y)}{dy^5}\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$

$$=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{N'^5\cdot\cos\varphi'}\cdot(5+28tg^2\varphi'+24tg^4\varphi'+6\eta'^2+8\eta'^2\cdot\right.$$

$$\left.\cdot tg^2\varphi'-3\eta'^4\cdot tg^2\varphi'-4\eta'^6+24\eta'^6\cdot tg^2\varphi')\right)\cdot\frac{d\varphi}{ds_m}\cdot\frac{ds_m}{dy}=$$

$$=\frac{tg\varphi'}{N'^6\cdot\cos\varphi'}\cdot(61+180tg^2\varphi'+120tg^4\varphi'+46\eta'^2+48\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-$$

$$-3\eta'^4\cdot tg^2\varphi'+100\eta'^6-96\eta'^6\cdot tg^2\varphi'+88\eta'^8-192\eta'^8\cdot tg^2\varphi')$$

$$\eta'^2=e'^2\cdot\cos^2\varphi'$$

$$e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

2. Conversión de Coordenadas.

PROBLEMA INVERSO

- Teniendo en cuenta las derivadas calculadas, las expresiones para resolver el problema inverso son:

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda=&\frac{x}{N'\cdot\cos\varphi'}-\frac{x^3}{6\cdot N'^3\cdot\cos\varphi'}\cdot\left(1+2tg^2\varphi'+\eta'^2\right)+\frac{x^5}{120\cdot N'^5\cdot\cos\varphi'}\cdot\\&\cdot\left(5+28tg^2\varphi'+24tg^4\varphi'+6\eta'^2+8\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-3\eta'^4\cdot tg^2\varphi'-4\eta'^6+24\eta'^6\cdot tg^2\varphi'\right)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi=&\phi'-\frac{x^2}{2\cdot N'^2\cdot\cos\varphi'}\cdot tg\varphi'+\frac{x^4}{24\cdot N'^4\cdot\cos\varphi'}\cdot tg\varphi'\cdot\left(5+6tg^2\varphi'+\eta'^2-4\eta'^4\right)+\\&+\frac{x^6}{720\cdot N'^6\cdot\cos\varphi'}\cdot tg\varphi'\cdot\left(\begin{aligned}&61+180tg^2\varphi'+120tg^4\varphi'+46\eta'^2+48\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-\\&-3\eta'^4\cdot tg^2\varphi'+100\eta'^6-96\eta'^6\cdot tg^2\varphi'+88\eta'^8-192\eta'^8\cdot tg^2\varphi'\end{aligned}\right)\end{aligned}}$$

- De esta manera obtenemos las coordenadas del sistema isométrico (ϕ, λ), donde $\lambda=\lambda-\lambda_o$, siendo λ_o la longitud del Meridiano Central del huso y ϕ la latitud isométrica correspondiente a la latitud geodésica φ.

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LATITUD GEODÉSICA

1º MÉTODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE ϕ

$$\boxed{\phi = Ln\left[\left(\frac{1-e\cdot sen\varphi}{1+e\cdot sen\varphi}\right)^{e/2}\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right]}$$

1. Primer valor, aproximo a un modelo de tierra esférica (e=0).

$$\phi = Ln\left[\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right] \Rightarrow e^{\phi} = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \varphi_1 = 2\cdot\left(arctg\left(e^{\phi}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0,''00001$ se para el proceso).

$$\phi = Ln\left[\left(\frac{1-e\cdot sen\varphi_{n-1}}{1+e\cdot sen\varphi_{n-1}}\right)^{e/2}\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right)\right] \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right) = \frac{e^{\phi}}{\left(\frac{1-e\cdot sen\varphi_{n-1}}{1+e\cdot sen\varphi_{n-1}}\right)^{e/2}} = \frac{e^{\phi}\cdot(1+e\cdot sen\varphi_1)^{e/2}}{(1-e\cdot sen\varphi_1)^{e/2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_n = 2\cdot\left[arctg\left(\frac{e^{\phi}\cdot(1+e\cdot sen\varphi_{n-1})^{e/2}}{(1-e\cdot sen\varphi_{n-1})^{e/2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LATITUD GEODÉSICA

2º METODO. DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

$$\varphi = h(\phi) = \int_0^{\phi}\frac{r}{\rho}d\phi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{r}{\rho} \quad , \quad \frac{dh}{d\varphi} = 1$$

- Se calcula φ como un desarrollo en serie de Taylor de la función h(ϕ), particularizando para el punto Φ´, tomando como incremento el valor Δϕ= ϕ-ϕ´.

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi = \varphi' &- \frac{x^2}{2\cdot N'^2}\cdot tg\varphi'\cdot(1+\eta'^2) + \frac{x^4}{24\cdot N'^4}\cdot tg\varphi'\cdot\left(5+3tg^2\varphi'+6\eta'^2-6\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-3\eta'^4-9\eta'^4\cdot tg^2\varphi'\right) - \\ &- \frac{x^6}{720\cdot N'^6}\cdot tg\varphi'\cdot\begin{pmatrix}61+90tg^2\varphi'+45tg^4\varphi'+107\eta'^2-162\eta'^2\cdot tg^2\varphi'-45\eta'^2\cdot tg^4\varphi'+43\eta'^4- \\ -318\eta'^4\cdot tg^2\varphi'+135\eta'^4\cdot tg^4\varphi'+97\eta'^6+18\eta'^6\cdot tg^2\varphi'+225\eta'^6\cdot tg^4\varphi'+188\eta'^8- \\ -108\eta'^8\cdot tg^2\varphi'+88\eta'^{10}-192\eta'^{10}\cdot tg^2\varphi'\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

ϕ y ϕ´ expresados en radianes.

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- La longitud de arco de meridiano, desde el Ecuador hasta un paralelo de latitud φ, se expresa como:

$$\boxed{l.a.m.(\varphi) = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^{3/2}}}$$

- Para calcular la anterior integral se realiza el desarrollo en potencias de $e^2 \cdot sen^2\varphi$ y hacemos el cambio de variable $x = sen\varphi$:

$$f(\varphi) = \frac{1}{(1 - e^2 \cdot sen^2\varphi)^{3/2}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(1 - e^2 \cdot x^2)^{3/2}}$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot x^2 + \frac{15}{8} \cdot e^4 \cdot x^4 + \frac{35}{16} \cdot e^6 \cdot x^6 + \frac{315}{128} \cdot e^8 \cdot x^8 + \frac{693}{256} \cdot e^{10} \cdot x^{10} + \ldots$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- Deshacemos el cambio de variable e integramos y obtenemos la siguiente expresión para determinar la longitud de arco de meridiano:

$$\boxed{l.a.m.(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi = a(1 - e^2) \cdot (g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6)}$$

- Siendo los diferentes valores de g_n:

$$g_1 = \varphi$$

$$g_2 = \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot sen\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$g_3 = \frac{15}{8} \cdot e^4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot sen^3\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{3}{8} \cdot sen\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{3}{8}\varphi\right)$$

$$g_4 = \frac{35}{16} \cdot e^6 \cdot \left(-\frac{1}{6} \cdot sen^5\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{5}{24} \cdot sen^3\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{5}{16} \cdot sen\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{5}{16}\varphi\right)$$

$$g_5 = \frac{315}{128} \cdot e^8 \cdot \left(-\frac{1}{8} \cdot sen^7\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{7}{48} \cdot sen^5\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{35}{192} \cdot sen^3\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{35}{128} \cdot sen\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{35}{128}\varphi\right)$$

$$g_6 = \frac{693}{256} \cdot e^{10} \cdot \left(-\frac{1}{10} \cdot sen^9\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{9}{80} \cdot sen^7\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{21}{160} \cdot sen^5\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{21}{128} \cdot sen^3\varphi \cdot \cos\varphi - \frac{63}{256} \cdot sen\varphi \cdot \cos\varphi + \frac{63}{256}\varphi\right)$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

1º METODO. A PARTIR DE LA EXPRESIÓN DE LA PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

- Para calcular la latitud geodésica φ a partir de la longitud de arco de meridiano, partimos de la expresión anterior y realizamos un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas:

$$\boxed{l.a.m.(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho \cdot d\varphi = a(1-e^2)\cdot(g_1+g_2+g_3+g_4+g_5+g_6)}$$

1. Primer valor, igualo todos los términos g_n a 0, excepto g_1 y despejo:

$$g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = g_6 = 0 \;\Rightarrow\; l.a.m. = a\cdot(1-e^2)\cdot g_1 = a\cdot(1-e^2)\cdot\varphi \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \frac{l.a.m.}{a\cdot(1-e^2)}$$

2. Con el valor obtenido se calculan los términos g_2 a g_6 y se despeja un nuevo valor de φ del término g_1. Se realiza un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\phi_n - \phi_{n-1} < 0{,}''00001$ se para el proceso).

$$\varphi_n = \frac{l.a.m.}{a\cdot(1-e^2)} - \left[(g_2)_{\varphi_{n-1}} + (g_3)_{\varphi_{n-1}} + (g_4)_{\varphi_{n-1}} + (g_5)_{\varphi_{n-1}} + (g_6)_{\varphi_{n-1}}\right]$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

2º METODO.

- Otra forma de calcular la longitud de arco de meridiano es utilizando la expresión:

$$\boxed{l.a.m. = s_m = m\cdot\varphi - n\cdot sen2\varphi + p\cdot sen4\varphi - q\cdot sen6\varphi}$$

- φ se introduce en radianes y los términos se calculan:

$$m = A\cdot a\cdot(1-e^2) \qquad n = \frac{B}{2}\cdot a\cdot(1-e^2)$$

$$p = \frac{C}{4}\cdot a\cdot(1-e^2) \qquad q = \frac{D}{6}\cdot a\cdot(1-e^2)$$

$$A = 1 + \frac{3}{4}\cdot e^2 + \frac{45}{64}\cdot e^4 + \frac{175}{256}\cdot e^6$$

$$B = \frac{3}{4}\cdot e^2 + \frac{15}{16}\cdot e^4 + \frac{525}{512}\cdot e^6$$

$$C = \frac{15}{64}\cdot e^4 + \frac{105}{256}\cdot e^6$$

$$D = \frac{35}{512}\cdot e^6$$

2. Conversión de Coordenadas.

CÁLCULO DE LA LONGITUD DE ARCO DE MERIDIANO

2º METODO.

- Para calcular la latitud geodésica φ a partir de la longitud de arco de meridiano, partimos de la expresión anterior y realizamos un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas:

$$\boxed{l.a.m. = s_m = m \cdot \varphi - n \cdot sen2\varphi + p \cdot sen4\varphi - q \cdot sen6\varphi}$$

1. Primer valor, igualo todos los términos 0, excepto el primero, m·φ:

$$l.a.m. = m \cdot \varphi_1 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{l.a.m.}{m}$$

2. Con el valor obtenido se calculan el resto de términos y se despeja un nuevo valor de φ. Se realiza un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia (p. e. $\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0,''00001$ se para el proceso).

$$\Rightarrow \varphi_n = \frac{l.a.m. + n \cdot sen2\varphi_{n-1} - p \cdot sen4\varphi_{n-1} + q \cdot sen6\varphi_{n-1}}{m}$$