Tema 2.
Condiciones de Conformidad

Alejandra Staller Vázquez

a.staller@upm.es

Tema 2.Condiciones de Conformidad

2.1.- CONDICIONES GENERALES DE CONFORMIDAD.

2.2.- CONDICIONES DE CONFORMIDAD DE CAUCHY-RIEMANN.

a) **LATITUD GEODÉSICA.**
b) **LATITUD CRECIENTE, ISOMÉTRICA O DE MERCATOR**

Condiciones Generales de Conformidad

- La condición de conformidad consiste en la conservación de la magnitud y sentido de los ángulos.
- Proyección Conforme -> aquella proyección que transforma figuras infinitesimales en el elipsoide en figuras semejantes en el plano de la proyección => un círculo infinitesimal en el elipsoide se transforma en otro círculo en el plano.

- En ese caso, la **Elipse Indicatriz** de **Tissot** se particulariza en una **circunferencia =>** $\boxed{a = b}$
- Si en todo punto el **módulo de deformación lineal** es **independiente** de la **dirección,** la proyección es **CONFORME**.

Condiciones Generales de Conformidad

- Las **condiciones generales de conformidad** pueden **expresarse** de la forma:

$$
\boxed{a = b}
\begin{cases}
F' = 0 & \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\dfrac{\partial x}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\dfrac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \\[2ex]
\dfrac{E'}{\rho^2} = \dfrac{G'}{r^2} & \Rightarrow \dfrac{1}{\rho^2}\left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\right) = \dfrac{1}{r^2}\left(\left(\dfrac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2\right)
\end{cases}
$$

Condiciones de Conformidad de Cauchy-Riemann

- Expresadas en función de la latitud geodésica:

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\end{array}}$$

- Expresadas en función de la latitud creciente:

$$\boxed{\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial \Phi} = -\frac{\partial y}{\partial \lambda} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial \Phi} = \frac{\partial x}{\partial \lambda}\end{array}}$$

5

Latitud Creciente
Sistema de Coordenadas Isométrico

- Sea una superficie S y (u, v) un sistema de coordenadas para S, al sistema de coordenadas (u, v) se le denomina SIMÉTRICO, ISOTERMO O ISOMÉTRICO, cuando los coeficientes de la 1ª forma fundamental verifican las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} F = 0 \\ E = G = k^2(u,v) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad ds^2 = k^2(u,v)(du^2 + dv^2)$$

- Para pasar de un sistema de coordenadas NO ISOMÉTRICO en el elipsoide o esfera a un sistema ISOMÉTRICO debemos introducir la **LATITUD CRECIENTE, ISOMÉTRICA o de MERCATOR**, nueva variable que depende de la latitud geodésica.

6

Latitud Creciente
Sistema de Coordenadas Isométrico

Latitud creciente (paso de latitud geodésica a latitud creciente):

Caso esférico -> $\mathrm{d}\Phi = \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad \rightarrow \quad \Phi = \ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

Caso elipsoidal -> $\mathrm{d}\Phi = \frac{\rho}{r}d\varphi \quad \rightarrow \quad \Phi = \ln\left[\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\tan\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

7

Latitud Creciente
Sistema de Coordenadas Isométrico

Paso de latitud creciente a latitud geodésica: $\Phi = \ln\left[\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\mathrm{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

1. Primer valor, aproximo a un modelo de tierra esférica (e=0).

$$\phi = Ln\left[\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right] \Rightarrow e^{\phi} = tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \varphi_1 = 2\cdot\left(arctg\left(e^{\phi}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Se establece un criterio de convergencia.

$$\phi = Ln\left[\left(\frac{1-e\cdot sen\varphi_{n-1}}{1+e\cdot sen\varphi_{n-1}}\right)^{e/2}\cdot tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right)\right] \Rightarrow tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_n}{2}\right) = \frac{e^{\phi}}{\left(\frac{1-e\cdot sen\varphi_{n-1}}{1+e\cdot sen\varphi_{n-1}}\right)^{e/2}} = \frac{e^{\phi}\cdot(1+e\cdot sen\varphi_1)^{e/2}}{(1-e\cdot sen\varphi_1)^{e/2}}$$

$$\Rightarrow \varphi_n = 2\cdot\left[arctg\left(\frac{e^{\phi}\cdot(1+e\cdot sen\varphi_{n-1})^{e/2}}{(1-e\cdot sen\varphi_{n-1})^{e/2}}\right)-\frac{\pi}{4}\right]$$

$\Phi_n - \Phi_{n-1} < 0,''00001$ se para el proceso

8

Condiciones de Conformidad

Expresada en función de una función analítica de variable compleja

- Una **función** que tiene **derivada continua** en el campo de los **números complejos** verifica las condiciones de **Cauchy-Riemman.**
- Una **función** de **variable compleja** es una aplicación $w = f(z)$ que transforma puntos en el plano complejo z a puntos en el plano complejo w. Se puede escribir por tanto $w = f(z)$ o de modo equivalente :

$$u + iv = f(x + iy)$$

de forma que la función de variable compleja quedará definida si se conoce la forma de dos **funciones** de **variable real**:

$$\boxed{\begin{array}{c} u = u\,(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array}}$$

TEOREMA.

- Dos **superficies** admiten una **representación conforme** siempre que a un **sistema isométrico (u,v)** de una de ellas, le corresponda un **sistema isométrico** de la otra **(x, y).** Esta correspondencia puede establecerse mediante una **FUNCIÓN ANALÍTICA DE VARIABLE COMPLEJA.**