

- 1.- (a) Enunciar y expresar matemáticamente el teorema de Gauss.  
(b) Demostrar que la intensidad de campo  $\vec{g}$  y el potencial gravitatorio terrestre  $W$ , están relacionados por la siguiente expresión:

$$dW = \vec{g} \cdot d\vec{l} ,$$

siendo  $d\vec{l}$  el diferencial de desplazamiento.

- (c) Demostrar que el potencial de las fuerzas centrífugas es:

$$\phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) .$$

- 2.- La expresión del potencial gravitacional (o Newtoniano) de la Tierra es:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (J_n^m \cos m\lambda + K_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) \right]$$

- (a) Explicar el significado de cada uno de los términos que aparecen en ella. Explicar en qué región del espacio es aplicable y porqué.  
(b) Dar la expresión del potencial gravitatorio terrestre, para un modelo con simetría rotacional y ecuatorial, hasta términos de segundo orden, introduciendo (definiéndola previamente) la constante geodinámica  $m$ .
- 3.- (a) Definir: anomalía de la gravedad, potencial perturbador, ondulación del geoide y desviación de la vertical.  
(b) Deducir la ecuación fundamental de la geodesia física.  
(c) Deducir la aproximación esférica de la ecuación fundamental de la geodesia física, explicando su significado.
- 4.- Explicar los fundamentos físicos (esquemas, ecuaciones de equilibrio y sensibilidad) de un gravímetro lineal y un gravímetro astático.
- 5.- (a) Dar la expresión de las diferentes anomalías gravimétricas empleadas en Geodesia Física.  
(b) Deducir las expresiones del valor de la raíz y antirraíz en el modelo isostático de Airy-Heiskanen.  
(c) Dar la expresión del valor de la densidad en función de la altura y la profundidad en el modelo de Pratt-Hayford.

1.- (a) Demostrar que la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2,$$

es armónica en todo punto del espacio.

(b) Demostrar que si  $V_1$  y  $V_2$  son dos funciones armónicas, también lo será:

$$V = \alpha_1 \frac{\partial V_1}{\partial x} + \alpha_2 V_2,$$

siendo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  constantes.

(c) Hallar el valor del Laplaciano ( $\nabla^2 W \equiv \Delta W$ ) del potencial gravitatorio terrestre  $W$ . (i) en un punto exterior a la misma y (ii) en un punto interior de densidad  $\rho = 3200 \text{ kg.m}^{-3}$ .

Datos  $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ ,  $\omega = 7292.115 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$

2.- Si el momento de inercia de la Tierra respecto al eje de rotación fuera igual al valor de los momentos de inercia respecto a sus ejes ecuatoriales, y tomando para su radio ecuatorial  $a = 6\,371\,000 \text{ m}$ , para la constante gravitacional geocéntrica,  $GM = 3\,986\,005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{s}^{-2}$  y para su velocidad de rotación  $\omega = 7292.115 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$ , hallar en primer orden de aproximación:

- El aplanamiento geométrico.
- La expresión numérica del radio vector del esferoide de nivel.
- El aplanamiento gravimétrico.
- La expresión numérica de la gravedad normal.
- El valor del potencial normal correspondiente a la superficie de nivel.

3.- El periodo de oscilación de un péndulo de longitud constante es  $T_1 = 0.506060 \text{ s}$  en una estación  $S_1$  situada al nivel del mar, donde el valor absoluto de la gravedad es  $g_1 = 980.49704 \text{ gales}$ . En una segunda estación, el periodo de oscilación del mismo péndulo es  $T_2 = 0.506061 \text{ s}$ . Determinar en la segunda estación  $S_2$ :

- El valor absoluto de la gravedad.
- La cota geopotencial, sabiendo que el desnivel respecto de la estación  $S_1$ , determinada por nivelación geométrica es de  $19.5 \text{ m}$ .
- La altitud ortométrica Helmert.
- La anomalía de Bouguer simple en el SGR 80. (La latitud de  $S_2$  es  $\varphi_2 = 43^\circ 27' 40''$ ).
- La diferencia de potencial respecto de la estación  $S_1$ .

Datos:

Coefficiente de reducción Aire Libre:  $0.3086 \text{ mgal/m}$

Coefficiente de reducción por lámina de Bouguer:  $0.1119 \text{ mgal/m}$

En	La	fórmula	de	la	gravedad	normal	SGR	80:

$\gamma_e = 978.0327 \text{ gal}$ ,  $\beta = 0.0053024$ ,  $\beta_1 = -0.0000058$